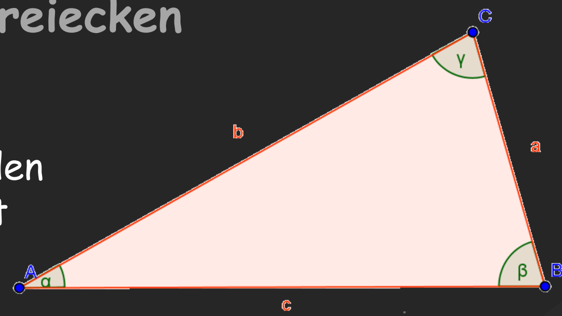
Berechnungen in Dreiecken – Allgemeines zu Dreiecken

Innenwinkelsatz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

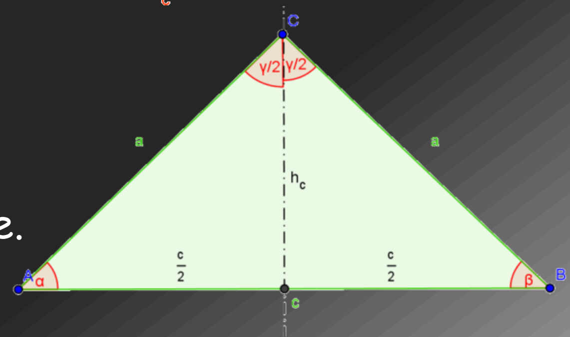
Die Ecken werden immer gegen den Uhrzeigersinn beschriftet, sonst falscher Umlaufsinn!



Besondere Dreiecke

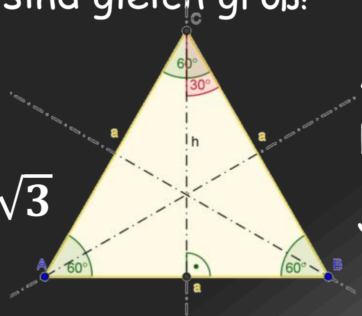
- **Gleichschenkliges Dreieck**

Die Schenkel a sind gleich lang. $[AB]$heißt Basis. Die Höhe h_c halbiert den Winkel γ, die Basis $[AB]$ und ist Symmetrieachse. α und β heißen Basiswinkel und sind gleich groß!



- **Gleichseitiges Dreieck**

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}; \quad A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$



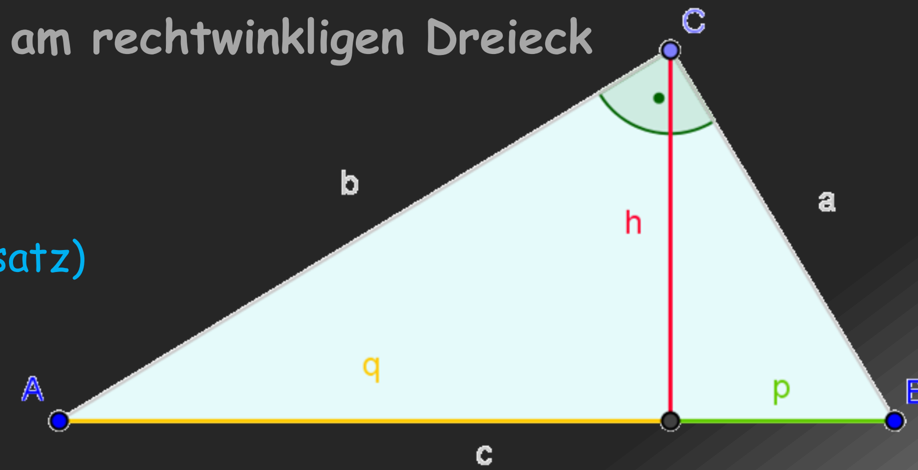
Alle Seiten sind gleich lang, die Winkel betragen alle 60°. Die Höhe halbiert jeweils Seite und Winkel.

- **Rechtwinkliges Dreieck**

Die Seite gegenüber des rechten Winkels heißt Hypotenuse, die beiden anderen Katheten.

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt

Berechnungen in Dreiecken – Sätze am rechtwinkligen Dreieck



Satzgruppe des Pythagoras

$c^2 = a^2 + b^2;\qquad h^2 = p \cdot q;$ (Höhensatz)

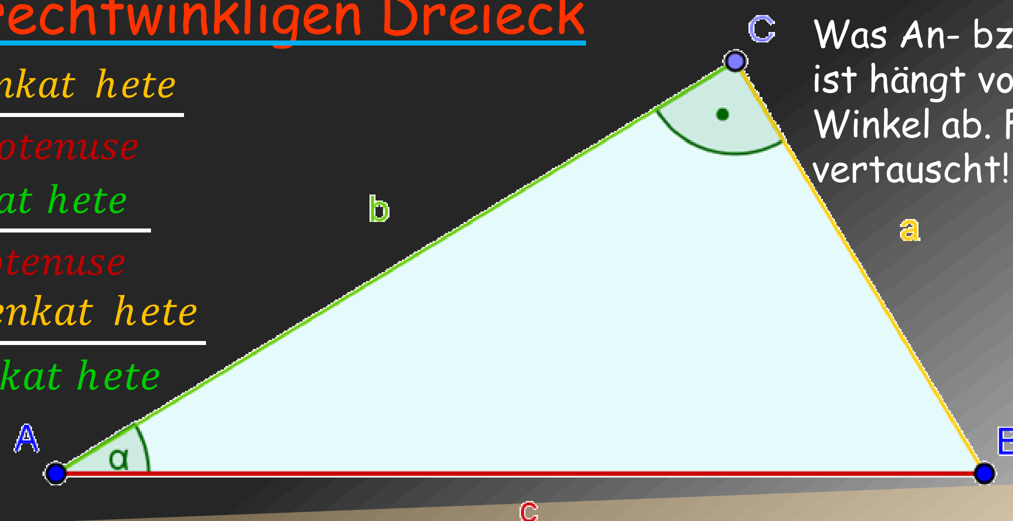
$a^2 = c \cdot p;\quad b^2 = c \cdot q$ (Kathensatz)

Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

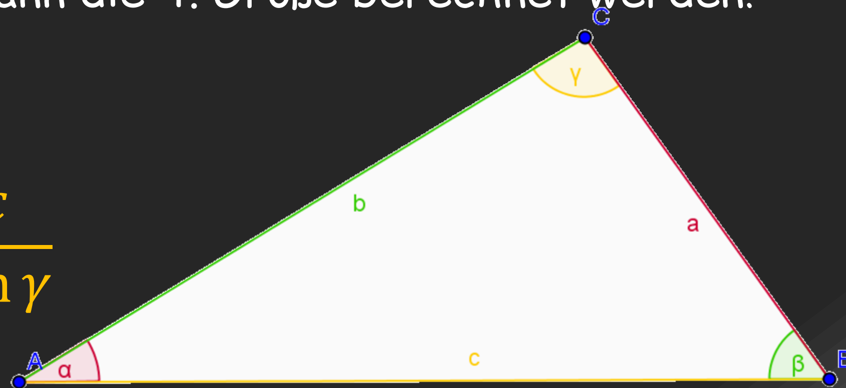


Was An- bzw. Gegenkathete ist hängt vom betrachteten Winkel ab. Für β sind diese vertauscht!

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt

Berechnungen in Dreiecken – Sinus- und Kosinussatz

Um auch in allgemeinen Dreiecken Winkel und Seiten berechnen zu können kannst du Sinus- und Kosinussatz verwenden. Sie benötigen jeweils 4 Größen. Mit 3 bekannten Größen, kann die 4. Größe berechnet werden!



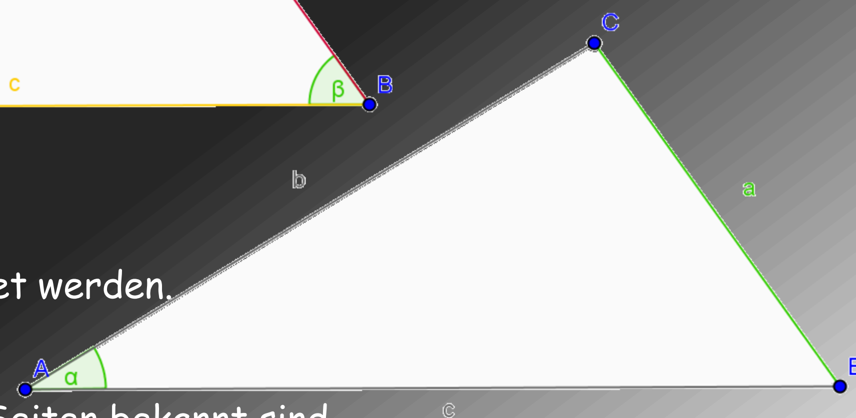
Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Der Kosinussatz kann für jeden Winkel angewendet werden.
Es liegt immer, die gesuchte Seite dem Winkel gegenüber.
Auch ein Winkel kann berechnet werden, wenn 3 Seiten bekannt sind.



- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
    - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
    - **Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck**
    - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt

Berechnungen in Dreiecken –

Funktionale Abhängigkeiten in der ebenen Geometrie

Funktionale Abhängigkeit kann heißen, dass ein oder mehrere Punkte auf einem Funktionsgraphen liegen und mit anderen Punkten Figuren bilden.

$A \in f: y = \log_2(x+8)+1 \quad \Longrightarrow \quad A_n = (x|\log_2(x+8)+1)$ *

Oder es sind Vektoren in Abhängigkeit eines Winkels gegeben die Figuren, wie Parallelogramme, aufspannen.

$$\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi - 2 \\ 0{,}5 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix};\ \overrightarrow{OR_n} = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi \\ -3\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$$ *

Mit diesen abhängigen Koordinaten kannst du rechnen wie mit konkreten Koordinaten.

*[Beispiele aus der Mathematikabschlussprüfung 2009 an bayerischen Realschulen]

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - **Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten**
- Skalarprodukt

Berechnungen in Dreiecken –

Funktionale Abhängigkeiten in der ebenen Geometrie

Um diese Terme zu ermitteln musst du herkömmliche Formeln verwenden, aber statt konkrete Punkte oder Vektoren die abhängigen Größen A_n oder $\overrightarrow{OP_n}; \overrightarrow{OR_n}$ einsetzen.

Den jeweiligen Ansatz musst du dir aus der Situation heraus überlegen!

Weiter kann es sein dass ein Punkt A_n abgebildet wird und ein Bildpunkt berechnet werden muss. Dann wird A_n die Abbildungsgleichung eingesetzt.

Bsp: $A_n(x|x^2+2x-1) \xrightarrow{Z(-3|2)} B_n(x'|y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2x_z \\ 2y_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2+2x-1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x' = -x-6$$
$$y' = -x^2-2x+1$$

$B_n(-x-6|-x^2-2x+1)$

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt

Berechnungen in Dreiecken -

Funktionale Abhängigkeiten in der ebenen Geometrie

Trägergraphen:

Ist ein Punkt in der Art $B_n(-x-6|-x^2-2x+1)$ gegeben $(x-Koordinate\ ist\ nicht\ einfach\ x)$ kann man den Trägergraphen ermitteln, das heißt die Kurve auf der alle Punkte B_n liegen.

1. Punkt als Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{aligned} x' &= -x-6 \\ y' &= -x^2-2x+1 \end{aligned}$$

2. Erste Zeile nach x auflösen

$$x = -x' - 6$$

3. x in zweite Zeile einsetzen

$$y' = -(-x'-6)^2 - 2(x'-6) + 1$$

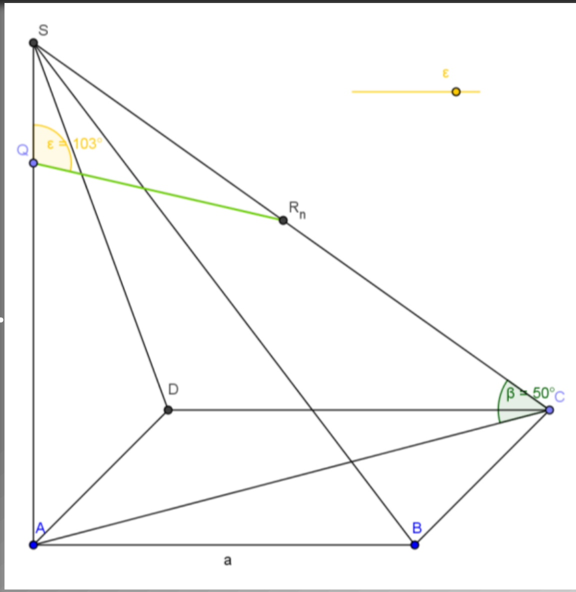
Der Trägergraph der Punkte B_n ist: $y = -x^2 - 14x - 23$

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt

Berechnungen in Dreiecken –

Funktionale Abhängigkeiten in der räumlichen Geometrie

Hier wird in einem Körper, häufig einer Pyramide, eine Strecke festgelegt. Ihre Länge hängt von einem Winkelmaß ab.



Um den Term für die Streckenlänge in Abhängigkeit des Winkels zu bestimmen müssen Sätze am rechtwinkligen oder allgemeinen Dreieck angewandt werden, wobei der Winkel allgemein stehen bleibt.

Bsp.: siehe Aufgabe 2

Berechnungen an einer Pyramide

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt